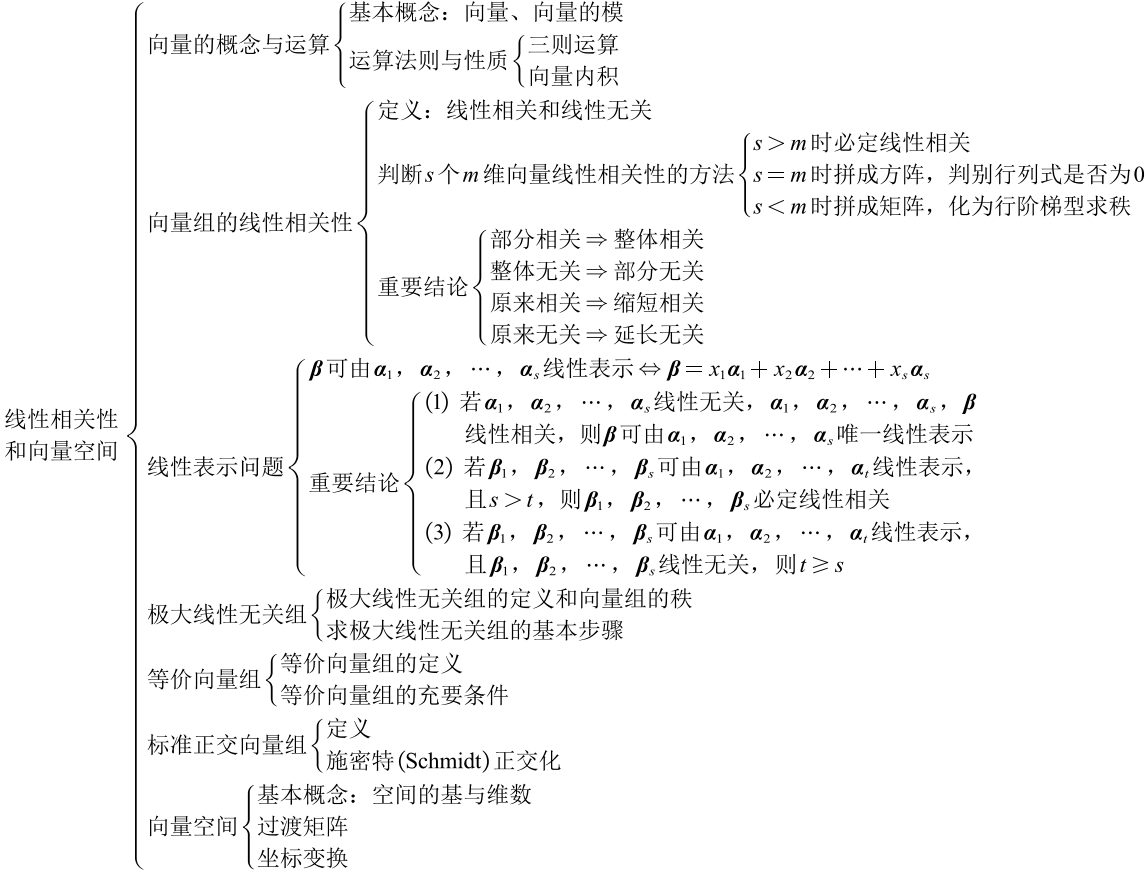


知识点 10~15

【总 览】

知识点 10~15 是围绕线性相关性和向量空间展开的. 其中, 知识点 10 介绍向量的概念以及运算, 这是本部分最为基础的知识点; 知识点 11 介绍向量组的线性相关性和线性表示, 这是本部分最为重要的知识点, 其涵盖线性相关和线性无关的定义、判断线性相关性的一般方法、线性表示的定义以及考试中经常用到的一些重要结论, 通过后续学习线性方程组的求解可知, 线性相关性的实质是齐次线性方程组的求解问题, 而线性表示的实质是非齐次线性方程组的求解问题, 因此知识点 11 需要花费足够的时间好好学习理解; 知识点 12~15 分别介绍一些简单的知识点, 在学习时需要理解其概念, 其中求向量组的极大线性无关组有通用的解题技巧, 如何判断两个向量组等价的充要条件是需要着重理解和记忆的, 对于标准正交向量组的求法只需要记住施密特正交化方法即可, 而向量空间的学习重点则在过渡矩阵与坐标变换的计算上, 对于空间的基和维数只需要知道定义即可.

本部分 6 个知识点的框架如下:



知识点 10 向量的概念与运算

1. 向量的概念

向量: 由 n 个数构成的数组 $[a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ 或 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 称为 n 维列向量或 n 维行向量. 若无特

殊说明, 一般我们所说的向量都是指列向量. 另外所有元素皆为零的向量称为**零向量**, 用符号 $\mathbf{0}$ 表示.

向量的模或长度: 设 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, 称 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 为**向量的模或长度**, 记为 $|\alpha|$. 显然, 零向量的模为 0. 另外, 如果向量的模为 1, 则称该向量为**单位向量**.

2. 向量的三则运算

记 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, 则 $\alpha \pm \beta = [a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n]^T$, $k\alpha = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n]^T$.

其运算满足以下性质:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma,$$

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \quad (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha.$$

3. 向量的内积

$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ 称为向量 α 和 β 的**内积**, 记为 (α, β) . 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称向量 α , β **正交**.

向量的内积满足如下性质:

$$(1) (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha.$$

$$(2) (\alpha, \alpha) = |\alpha|^2, \quad \text{因此} (\alpha, \alpha) = 0 \text{ 的充要条件是 } \alpha = \mathbf{0}.$$

$$(3) (\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n) = k_1(\alpha, \beta_1) + k_2(\alpha, \beta_2) + \dots + k_n(\alpha, \beta_n).$$

例 设 $\alpha_1 = [1, 1, -1]$, $\alpha_2 = [-2, -1, 2]$, 若 $\alpha = [2, \lambda, u]$ 与 α_1 及 α_2 都正交, 则 $\lambda = (\quad)$.

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

解 由两者正交可得其内积为 0, 则
$$\begin{cases} 2 + \lambda - u = 0, \\ -4 - \lambda + 2u = 0, \end{cases}$$
解得 $\lambda = 0$, $u = 2$, 选择 C.

知识点 11 向量组的线性相关性和线性表示

1. 线性相关性的定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为一个向量组, 则称 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的**线性组合**.

若存在一组不全为 0 的数 x_1, x_2, \dots, x_s 使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ **线性**

相关. \iff 齐次方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} (Ax = \mathbf{0})$ 有非零解 $\iff r(A) < s$.

若使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 成立, 必须有 $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ **线性无关**.

$$\Leftrightarrow \text{齐次方程组 } [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} (Ax = \mathbf{0}) \text{ 仅有零解} \Leftrightarrow r(A) < s.$$

2. 判别线性相关性的方法

设有 s 个 m 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 构造矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]_{m \times s}$.

(1) $s = m$ 时, 判断行列式是否为 0: $\begin{cases} |A| = 0 \Rightarrow \text{线性相关 [此时 } r(A) < s], \\ |A| \neq 0 \Rightarrow \text{线性无关 [此时 } r(A) = s]. \end{cases}$

(2) $s > m$ 时, 必定线性相关 [此时 $r(A) \leq m < s$].

(3) $s < m$ 时, 将矩阵 A 利用行初等变换化成行阶梯型矩阵 B , 求 B 的秩: $\begin{cases} r(B) < s \Rightarrow \text{线性相关}, \\ r(B) = s \Rightarrow \text{线性无关}. \end{cases}$

例 1 已知向量组 $\alpha_1 = [a, 0, 1]^T$, $\alpha_2 = [0, a, 2]^T$, $\alpha_3 = [10, 3, a]^T$ 线性无关, 则 a 的取值范围是_____.

解 依题意可知 $\begin{vmatrix} a & 0 & 10 \\ 0 & a & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} \neq 0$, 即 $a(a^2 - 16) \neq 0$, 则 $a \neq -4, 0, 4$.

技巧: 以下 4 个重要结论需要牢记.

(1) 部分相关 \Rightarrow 整体相关.

例如: α_1, α_2 线性相关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2) 整体无关 \Rightarrow 部分无关.

例如: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 线性无关.

(3) 原来相关 \Rightarrow 缩短相关.

例如: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ 线性相关, 则缩短后 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 也线性相关.

(4) 原来无关 \Rightarrow 延长无关.

例如: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 线性无关, 则无论 a, b 取何值, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ b \end{bmatrix}$ 都不可能线性相关.

3. 线性表示的定义

(1) 若存在一组数 x_1, x_2, \dots, x_s , 使得 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s$ 成立, 则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \beta (Ax = \beta) \text{ 有解} \Leftrightarrow r(A | \beta) = r(A).$$

(2) 若不存在任何一组数 x_1, x_2, \dots, x_s 使 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s$, 则称 β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

$$\text{线性表示.} \iff [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \beta \iff (Ax = \beta) \text{无解} \iff r(A | \beta) = r(A).$$

4. 线性表示的重要结论

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示.

(2) 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表示, 且 $s > t$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 必定线性相关.

(3) 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表示, 且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关, 则 $t \geq s$.

例 2 设向量 β 可被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 但不能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示, 证明:

(1) 向量 α_r 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示.

(2) 向量 α_r 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$ 线性表示.

证明 (1) (反证法) 设向量 α_r 能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示, 则由定义可知, 存在一系列数 l_1, l_2, \dots, l_{r-1} , 使得 $\alpha_r = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_{r-1}\alpha_{r-1}$. 又由于向量 β 可被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 则由定义可知, 存在一系列数 k_1, k_2, \dots, k_r , 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + k_r\alpha_r$. 由此可得:

$$\begin{aligned} \beta &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + k_r(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_{r-1}\alpha_{r-1}) \\ &= (k_1 + k_rl_1)\alpha_1 + (k_2 + k_rl_2)\alpha_2 + \dots + (k_{r-1} + k_rl_{r-1})\alpha_{r-1}. \end{aligned}$$

即 β 可被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示, 这与题干矛盾, 所以向量 α_r 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示.

(2) 由于向量 β 可被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 由定义可知, 存在一系列数 k_1, k_2, \dots, k_r , 使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + k_r\alpha_r$, 其中 k_r 不能为零, 否则与 β 不能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示相矛盾, 从而得到 $\alpha_r = \frac{1}{k_r}\beta - \frac{k_1}{k_r}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_r}\alpha_2 - \dots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\alpha_{r-1}$, 即向量 α_r 能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$ 线性表示.

知识点 12 极大线性无关组

1. 极大线性无关组的定义

若 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 满足① 取自 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, ② 线性无关, ③ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任一个 α_i 均可由其线性表示, 则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**. 对任意一个向量组而言, r 是唯一的, 称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的**秩**.

2. 求极大线性无关组的基本步骤

(1) 构造 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$.

(2) 对 A 做初等行变换, 化为行阶梯型矩阵 $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s]$, 在每个台阶上任取一列, 即可得到极大线性无关组. (定理: 经过初等行变换, 不改变矩阵列向量的线性相关性)

例 若 $\alpha_1 = [1, 3, 2, 0]^T$, $\alpha_2 = [2, -1, 4, 1]^T$, $\alpha_3 = [-3, 5, -6, -2]^T$, $\alpha_4 = [2, -1, 0, 1]^T$,

$\alpha_5 = [7, 0, 6, 3]^T$ 构成一个向量组, 求它的秩和一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{显然 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \text{ 为一个极大无关组, 且 } \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4.$$

知识点 13 等价向量组

1. 等价向量组的定义

设有两个向量组: ① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$; ② $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$. 若①中 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ 均可由②线性表示, 则称向量组①可由向量组②线性表示. 若①和②可相互线性表示, 则称向量组①和向量组②是等价的向量组, 记为 $\textcircled{1} \cong \textcircled{2}$.

向量组①可由向量组②线性表示具体是指 $\forall \alpha_i \in \textcircled{1}, \alpha_i = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] \begin{bmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ k_{ti} \end{bmatrix} (i=1, 2, \dots, s)$, 利

用矩阵分块, 上述 s 个式子可以表示为 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{ts} \end{bmatrix}$, 因此向量

组①可由②线性表示等价于存在 $t \times s$ 矩阵 $K_{t \times s}$, 使得 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] K$.

当 α_i, β_j 是 \mathbf{R}^n 中的列向量时, $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] K$ 可视为矩阵方程, 若向量组

$\textcircled{1} \cong \textcircled{2}$, 则必定存在矩阵 $K_{t \times s}$ 和矩阵 $M_{s \times t}$, 使下面两式同时成立:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] K,$$

$$[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] M.$$

2. 等价向量组的充要条件

若向量组①和②中向量的维数相同, 则它们等价的充要条件是三秩相等, 即 $r(\textcircled{1}) = r(\textcircled{2}) = r([\textcircled{1} | \textcircled{2}])$. 此外, 如果向量组①可由②线性表示, 则它们不等价的充要条件是: $r(\textcircled{2}) = r([\textcircled{1} | \textcircled{2}]) > r(\textcircled{1})$.

3. 等价向量组的性质

(1) **自反性:** 一个向量组与其自身等价.

(2) **对称性**: 若向量组①和向量组②等价, 则向量组②也和向量组①等价.

(3) **传递性**: 若向量组①和向量组②等价, 向量组②和向量组③等价, 则向量组①与向量组③等价.

例 1 设 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可

由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 且这两个向量组不等价, 求 a, b 的值.

解 由已知可得 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) > r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & a & -1 & -1 \\ -1 & -2 & b & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & a-2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 3b+3 & a+7 & 3 & 10 \end{bmatrix},$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix},$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{bmatrix}.$$

所以 $a \neq 0$, $b = -1$, 此时 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3 > r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

知识点 14 标准正交向量组

1. 标准正交向量组的定义

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为**标准正交向量组** $\iff (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 只满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0 (i \neq j)$, 则它为正交的向量组.

(2) 不含零向量的正交向量组一定是线性无关组.

2. 施密特正交化

施密特正交化方法是从一组线性无关的向量中求出一组正交向量的方法.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为欧氏空间 \mathbf{R}^n 中的线性无关组, 取

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

\vdots

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i \quad (k=3, 4, \dots, m),$$

则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 为 \mathbf{R}^n 中的正交向量组.

☞技巧:

- (1) 用施密特正交化方法求出的正交向量组 β_i 可用 α_i 线性表示.
 (2) 该方法在知识点 21 中有重要用途.

知识点 15 向量空间

1. 向量空间的定义

设集合 V 非空, 且 $V \subseteq \mathbf{R}^n$, 若 $\alpha + \beta \in V$, $k\alpha \in V$, k 为实数, 则 V 为向量空间.

2. 空间的基与维数

设 V 是向量空间, 若有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \subseteq V$, 且满足① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, ② $\forall \beta \in V, \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 即 $\beta = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是向量空间 V 的基, 且 V 的维数 $\dim V = n$.
 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 维向量空间 V 中的标准正交向量组, 则它为向量空间 V 的标准正交基(或规范正交基).

例 1 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbf{R}^3 的规范正交基, $\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$ 与 $\beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ 的内积为_____.

解 由于 $(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, 则 $(\beta_1, \beta_2) = 2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 3 \times 1 = 7$.

3. 空间中向量的坐标

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是向量空间 V 的基, 任取向量 $\xi \in V$, 若 $\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, 则

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标向量.

☞技巧

- (1) 坐标是与基相关的概念, 同一个向量在不同基下的坐标一般是不同的.
 (2) 向量空间也可以看作向量组, 从该角度看, 空间的基、维数和坐标分别是向量组的极大线性无关组、秩和向量写成基的线性组合时的组合系数.

例 2 设 $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T$, $\alpha_2 = [1, 0, 1]^T$, $\alpha_3 = [0, 1, 1]^T$ 为 \mathbf{R}^3 的一组基, 则向量 $b = [2, 0, 0]^T$

在这组基下的坐标为_____.

解 由题意可得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. 过渡矩阵和坐标变换

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 n 维向量空间 V 的两组基, 若有 n 阶方阵 C , 使 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C$, 则 C 是由基 α_i 到基 β_i 的过渡矩阵.

设向量空间 V 中向量 ξ 在基 α_i 和 β_i 下的坐标分别为 X 和 Y , 即 $\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]X, \xi = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]Y$, 且 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C$, 则有 $X = CY$.

技巧

- (1) 过渡矩阵 C 一定可逆.
- (2) C^{-1} 是由基 β_i 到基 α_i 的过渡矩阵.
- (3) C 的第 i 列是 β_i 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标.

【重要题型】

题型 1 利用矩阵的秩证明线性相关性

若矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩 $r(A) = n$, 说明矩阵 A 的列向量线性无关. 特别地, 若 A 为方阵且 $|A| \neq 0$, 即 A 为满秩矩阵, 则 A 的列向量也线性无关.

例 1 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ 是 2 个 $m \times n$ 矩阵, 已知存在 n 阶方阵 K , 使 $B = AK$, 且矩阵 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关. 证明: 当且仅当 K 是可逆矩阵时矩阵 B 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也线性无关.

证明 由于矩阵 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 因此 $m \geq n$. 否则, 当 $m < n$ 时, $r(A) \leq \min(m, n) \Rightarrow r(A) < n$, 则 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 故矛盾. 由于 $m \geq n$, 且 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 因此 $r(A) = n$.

充分性的证明:

当 K 是可逆矩阵时, 由于 $B = AK$, 因此 $r(B) = r(A) = n$ (注: 与可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩). 因此, 矩阵 B 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也线性无关.

必要性的证明:

当矩阵 B 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关时, $r(B) = n$, 因此可得 $r(B) = r(A) = n$. 由题意可知

$B=AK$, 注意到 K 是 n 阶方阵, 可用反证法, 即假设 K 不可逆, 则一定有 $r(K) < n$. 因此, $r(AK) \leq \min(r(A), r(K)) = r(K) < n$ [注: 秩的不等式 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$]. 又由于 $r(B) = n$, $B=AK$, 所以 $r(AK) = n$, 与假设产生了矛盾, 即 K 一定是可逆矩阵.

例 2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ().

A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$

D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

解 选择 A.

$$[\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 记 } K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, |K| = 0, \text{ 则 } K \text{ 不可逆,}$$

所以 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, |K| = 2, \text{ 则 } K \text{ 可逆, 所以}$$

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

选项 C 和 D 同理.

题型 2 用定义和重要结论证明线性相关性

在某些题目的证明中, 利用定义证明线性相关性较为简单, 一般可利用反证法推出矛盾, 从而证明结论成立.

例 3 设 α_1, α_2 和 β_1, β_2 都是线性无关的三维向量, 证明: 存在三维非零向量 γ , 既可以由 α_1, α_2 线性表示, 也可以由 β_1, β_2 线性表示.

证明 由于 4 个三维向量必线性相关, 所以存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\beta_1 + k_4\beta_2 = 0$. 又由于 α_1, α_2 和 β_1, β_2 都是线性无关的, 所以 k_1, k_2 不同时为零, k_3, k_4 也不同时为零. 因此, 只需取 $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = -k_3\beta_1 - k_4\beta_2 \neq 0$ 即可.

例 4 已知向量 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 并且 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 证明: 存在不全为 1 的常数 c_2, c_3, c_4 , 使 $\alpha_1 = c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4$.

证明 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 k_2, k_3, k_4 , 使得 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$. 根据 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 两式相加得 $\alpha_1 = (k_2 + 1)\alpha_2 + (k_3 + 1)\alpha_3 + (k_4 + 1)\alpha_4 = c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4$, 而 $c_i = k_i + 1$ ($i = 2, 3, 4$) 不全为 1 (因为 k_2, k_3, k_4 不全为 0), 故结论成立.

例 5 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则下列结论中不正确的是 ().

A. 向量 α_4 可由 α_2, α_3 线性表示

B. 向量 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

C. 向量 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示 D. 向量 α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示

解 选择 D.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 α_2, α_3 线性无关 (整体无关 \Rightarrow 部分无关). 又由于 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 所以 α_4 一定可由 α_2 和 α_3 线性表示, α_4 也可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 (取 α_1 前面系数 $k_1=0$ 即可).

对于 D 选项, 假设 α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 结合 A 选项结论可知 α_1 一定可由 α_2 和 α_3 线性表示, 但是题干中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 因此矛盾, 所以 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 故 D 选项错误.

题型 3 极大线性无关组

例 6 已知向量组 $\alpha_1 = [1, 0, 2, 1]^T$, $\alpha_2 = [1, 2, 0, 1]^T$, $\alpha_3 = [2, 1, 3, 0]^T$, $\alpha_4 = [2, 5, -1, 4]^T$, $\alpha_5 = [1, -1, a, -1]^T$, 根据 a 的取值情况, 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩和一个极大线性无关组.

解 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}.$

当 $a=3$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一个极大线性无关组;

当 $a \neq 3$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 4$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 为一个极大线性无关组.

例 7 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$, 求此向量组的秩和一个极大线性无关组, 并将

其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 此向量组的一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 且 $\alpha_4 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.

题型 4 向量坐标与坐标变换

例 8 通过建立方程组, 求出三维列向量 $\alpha = [2, 3, 3]^T$ 在 \mathbf{R}^3 的一组基 $\eta_1 = [1, 1, 0]^T$, $\eta_2 = [1, 0, 1]^T$, $\eta_3 = [0, 1, 1]^T$ 下的坐标.

解 设 α 在 η_1, η_2, η_3 下的坐标是 $[k_1, k_2, k_3]^T$, 则 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, 所以

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

例 9 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- (1) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 \mathbf{R}^3 的基.
- (2) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.
- (3) 求 $\xi = -\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

解 (1) $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

都是 \mathbf{R}^3 的基.

- (2) 由 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]P = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 可得 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 则:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (3) $\xi = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]P \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, 则在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为:

$$P \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

【精选习题】

基础篇

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关的充要条件是 ().
 - A. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中含有零向量
 - B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有两个向量的对应分量成比例
 - C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每一个向量都可由其余向量线性表示
 - D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示
2. n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关的充要条件是 ().
 - A. 存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq \mathbf{0}$
 - B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表示

3. 已知由向量组 $\alpha_1 = [1, -3, 1, 1]^T$, $\alpha_2 = [2, 0, 1, -1]^T$, $\alpha_3 = [1, k, 0, -2]^T$ 所生成的向量空间维数是 2, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + k\alpha_3$ 线性相关, 则 k 满足 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 k 是一个实数, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m > 1)$ 线性无关, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$, 讨论向量组 $\beta + k\alpha_1, \beta + k\alpha_2, \dots, \beta + k\alpha_m$ 的线性相关性.

6. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和极大线性无关组.

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 向量 γ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \gamma$ 线性无关.

8. 若 $\alpha_1 = [1, 1, 2, 3]^T$, $\alpha_2 = [-1, 1, 4, -1]^T$ 是向量空间 V 的基, 求向量空间 V 的标准正交基.

9. 设三维向量空间 \mathbf{R}^3 中的两组基分别为 $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T$, $\alpha_2 = [0, 1, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, 0, 1]^T$ 和 $\beta_1 = [1, 0, 0]^T$, $\beta_2 = [1, 1, 0]^T$, $\beta_3 = [1, 1, 1]^T$.

(1) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

(2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下坐标为 $X = [3, 1, 2]^T$ 的向量在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为两两正交的非零向量, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

提高篇

11. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, β 不是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha + \beta$ 线性无关.

12. 设 a_1, a_2, \dots, a_s 是 s 个互不相同的数, 试讨论 s 个 n 维向量 $\alpha_i = [1, a_i, a_i^2, \dots, a_i^{n-1}]^T$ ($i=1, 2, \dots, s$) 的线性相关性.

13. 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 且可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 试证明:

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价.

14. 证明: n 维欧氏空间 \mathbf{R}^n 中, n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是

$$\text{行列式} \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

15. 已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 的秩的关系为 $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$, $r(\text{III}) = 4$, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha$ 的秩为 4.